

# Über stationäre, magnetogasdynamische Strömungen endlicher Ausdehnung \*

K. RAGALLER

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 23 a, 1940—1952 [1968]; eingegangen am 23. August 1968)

Steady, two-dimensional, magnetogasdynamical flows in a finite region are investigated. In this paper the case of aligned fields is treated. Outside of the flow a resting gas with arbitrary electrical conductivity is assumed. As the induced magnetic field can propagate throughout the resting gas, all the flow is strongly influenced by this adjacent field-occupied region.

This interaction between the field in the resting ambient gas and the flow can be formulated as an integral equation, the solution of which is given.

In a number of examples the applicability of this formalism is demonstrated. So the flow around a body, the reflection of waves at a boundary, and the influence of an applied magnetic field, are investigated for a flow in the halfspace and for a jet of finite thickness. Besides the flow variables, the location of the boundary and the induced field outside of the flow, are calculated.

Die Gleichungen der Magnetogasdynamik, die die Wechselwirkung einer Plasmastromung mit einem Magnetfeld beschreiben, sind wegen der komplizierteren Verkopplung der strömungsmechanischen und der elektromagnetischen Gleichungen bisher nur unter vereinfachenden Annahmen gelöst worden. Am fruchtbarsten hat sich dabei die aus der Gasdynamik übernommene Methode der Linearisierung des Gleichungssystems erwiesen. Eine Vielzahl von Autoren, von denen nur einige aufgeführt seien<sup>1–8</sup>, konnten eine Übersicht über die möglichen Erscheinungen erarbeiten, von denen einige ganz erheblich von den aus der Gasdynamik bekannten Effekten abweichen. So können z. B. theoretisch unter bestimmten Bedingungen von einem Körper in der Stromung Wellen und auch „Nachlaufzonen“ im stromaufwärts gelegenen Bereich erwartet werden. Dieser augenfällige Effekt, der eine Reihe von Experimentatoren zum Nachweis anspornt, konnte jedoch bisher noch nicht realisiert werden.

Alle genannten theoretischen Untersuchungen sind bisher von einer unendlich ausgedehnten magnetogasdynamischen Stromung ausgegangen. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß dies eine sehr erhebliche Einschränkung der Ergebnisse darstellt, da der endlichen Ausdehnung der Stromung in der Magnetogasdynamik eine wesentlich größere Bedeutung zukommt als in der Gasdynamik. Der Grund dafür

ist, daß sich außerhalb der Stromung das Magnetfeld ungehindert ausbreiten kann und vom gesamten Rand aus die Stromung beeinflußt.

Dieser Effekt spielt nicht nur bei der erwähnten experimentellen Untersuchung der Körperstromung in einem Strahl endlicher Dicke, sondern allgemein bei der Dynamik von Stromungen endlicher Ausdehnung eine entscheidende Rolle. Insbesondere die Beeinflussung begrenzter Plasmastromungen durch äußere Magnetfelder ist ein praktisch wichtiges Beispiel dafür. Auch für astrophysikalische Stromungen, beispielsweise für die Dynamik der Sonnenprotuberanzen, ist die Begrenzung des strömenden Plasmas von ausschlaggebender Bedeutung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, eine gewisse Systematik für magnetogasdynamische Stromungen bei endlicher Geometrie zu erarbeiten, und die Lösungen, die für unendliche Geometrie gefunden wurden, auch für endlich begrenzte Stromungen nutzbar zu machen. Dies erfolgt unter folgenden Einschränkungen: Es werden nur lineare, zweidimensionale, stationäre Stromungen bei sehr großer magnetischer Reynolds-Zahl betrachtet.

In dem hier vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird der sogen. Fall paralleler Felder behandelt, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die Stromung längs der magnetischen Feldlinien erfolgt. Dieser Fall ist im Hinblick auf Experimente am interessan-

\* Auszug aus einer Habilitationsschrift an der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München.

<sup>1</sup> H. GRAD, Rev. Mod. Phys. **32**, 830 [1960].

<sup>2</sup> W. R. SEARS, Rev. Mod. Phys. **32**, 701 [1960].

<sup>3</sup> E. L. RESLER u. J. E. McCUNE, Rev. Mod. Phys. **32**, 848 [1960].

<sup>4</sup> K. STEWARTSON, Rev. Mod. Phys. **32**, 855 [1960].

<sup>5</sup> I. IMAI, Rev. Mod. Phys. **32**, 992 [1960].

<sup>6</sup> S. I. PAI, Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Verlag Springer, Wien 1962.

<sup>7</sup> A. G. KULIKOVSKIY u. G. A. LYUBIMOV, Magnetohydrodynamics, Verlag Addison-Wesley, Reading 1965.

<sup>8</sup> F. H. CLAUSER, Phys. Fluids **6**, 231 [1963].



testen, da er am leichtesten realisiert werden kann. Auch für astrophysikalische Anwendungen ist er, wie sogleich erläutert wird, von größter Bedeutung.

Der allgemeine Fall mit einer beliebigen Richtung des Magnetfeldes in bezug auf die Strömung kann mit denselben Methoden, die hier für den Fall paralleler Felder abgeleitet wird, behandelt werden. Diese Ergebnisse sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden.

### 1. Problemstellung

Die wichtigste und interessanteste Begrenzung der Strömung ist die des sogen. freien Randes, wo an den strömenden Bereich ein ruhendes Gas grenzt. Die Form des Randes ist zunächst unbekannt und muß ermittelt werden. Dieser Fall wird hier ausschließlich untersucht. Die Begrenzung durch feste, leitfähige oder nicht-leitfähige Wände ist ein einfacheres Problem, das mit denselben Methoden behandelt werden kann. Das umgebende, ruhende Gas soll sich bis ins Unendliche mit überall konstantem Druck  $p_0$  erstrecken. Bei Laborversuchen wird es im allgemeinen nicht-leitfähig sein, während es in den meisten astrophysikalischen Situationen eine hohe elektrische Leitfähigkeit besitzt. Im letzteren Fall ergeben sich Einschränkungen für die angrenzende stationäre, magnetogasdynamische Strömung. Die induzierte elektrische Feldstärke darf nämlich im Außenraum keine elektrischen Ströme erzeugen, da wegen der damit verbundenen magnetischen Kräfte kein stationär ruhender Zustand des unendlich ausgedehnten umgebenden Gases möglich wäre. Die hier betrachtete Strömung längs der Feldlinien erfüllt diese Voraussetzung, die Lösungen dafür sind somit unabhängig von der Leitfähigkeit im Außenraum gültig.

Als Folge der Beschränkung auf zwei-dimensionale Strömungen treten nur elektrische Ströme in  $z$ -Richtung auf. Bei Anwendung der Ergebnisse auf praktische Fälle ist zu beachten, daß ein Vergleich nur möglich ist, wenn sich die in der Strömung induzierten Ströme zu einem geschlossenen Stromkreis schließen können, wie dies z. B. in einer rotationssymmetrischen Strömung der Fall ist.

Im Wesen der linearen Behandlung liegt, daß von einer bekannten Lösung der Gleichungen ausgegangen wird. Dafür wird hier eine Strömung konstanter Geschwindigkeit  $U$  in  $x$ -Richtung (s. Abb. 1) gewählt, der ein konstantes Magnetfeld  $B_{x0}$  eben-

falls in  $x$ -Richtung überlagert ist. Der Druck sei konstant gleich dem der Umgebung  $p_0$ , die Dichte sei  $\rho_0$ . Der Rand der Strömung wird angenähert durch einen Sprung der Geschwindigkeit vom Wert  $U$  innerhalb auf den Wert Null außerhalb, längs der sogen. Randstromlinie. Dies ist als Idealisierung einer in Wirklichkeit vorhandenen Grenzschicht aufzufassen, die in jedem Fall einen größeren räumlichen Bereich ausfüllt. Für die ungestörte Strömung ist der Rand durch Ebenen senkrecht zur  $y$ -Achse, wie sie in Abb. 1 gestrichelt eingezeichnet sind, gegeben. So kann durch eine Begrenzung eine Strömung im Halbraum, durch zwei Ebenen ein Strahl endlicher Dicke untersucht werden.

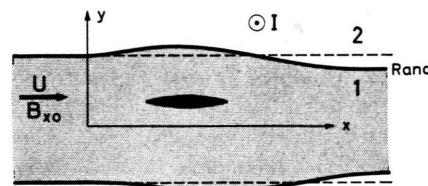


Abb. 1. Erläuterung der Problemstellung.

Wenn z. B. mit Hilfe einer von einem äußeren Strom  $I$  durchflossenen Spule ein äußeres Magnetfeld  $\mathbf{B}^a$  erzeugt wird, dann ruft dieses äußere Feld in der Plasmasströmung induzierte Feldstärken hervor, die i. allg. zu induzierten Stromdichten  $\mathbf{j}$  führen, die wiederum ein Magnetfeld erzeugen, das zur Unterscheidung vom äußeren Feld induziertes Feld  $\mathbf{B}^i$  genannt wird. In der Strömung kann außerdem noch ein Hindernis vorgegebener Form vorhanden sein.

Die Aufgabenstellung besteht nun darin, aus diesen gegebenen Größen Geschwindigkeit, Stromdichte und induziertes Magnetfeld innerhalb des Strahls, letzteres auch außerhalb des Strahls zu berechnen. Die Form des Randes ist ebenfalls wichtiger Bestandteil der Lösung.

### 2. Die Lösung im Bereich außerhalb der Strömung

Das induzierte Magnetfeld kann sich im Außenraum ungehindert ausbreiten, unabhängig von der Größe der elektrischen Leitfähigkeit in diesem Gebiet. In dem bei Experimenten vorliegenden Fall, daß außerhalb der Strömung die Leitfähigkeit Null ist, wird die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen, im Fall einer hohen Leitfähigkeit im Außen-

raum entsprechend von magnetogasdynamischen Wellen übernommen. Im Endzustand, wenn die Wellenausbreitung beendet ist, fließen im Außenraum nur die genannten äußeren Ströme, d. h. das induzierte Feld muß dort der Potentialgleichung genügen:

$$\Delta \mathbf{B}^i = 0. \quad (1)$$

Aus der Theorie der Potentialgleichung<sup>9</sup> ist bekannt, daß am Rand *eine* Komponente des Potentialfeldes als Randbedingung vorgegeben werden darf. Die andere Komponente ergibt sich dann aus der Lösung der Potentialgleichung in dem ganzen Bereich. Für die angrenzende Strömung ist nur dieser durch die Potentialgleichung gegebene Zusammenhang zwischen den beiden Feldkomponenten des induzierten Feldes von Bedeutung. Diese Beziehung läßt sich allgemein als Integralgleichung anschreiben, kann also ermittelt werden, ohne daß die Lösung der Potentialgleichung gefunden werden muß.

Ohne auf diese allgemeine Formulierung einzugehen, wird gleich das hier vorliegende Beispiel behandelt. Im ungestörten Fall hat der Außenbereich die Form eines durch eine Ebene  $y = \text{const}$  begrenzten Halbraums (Abb. 1). Die dafür gültige Integralgleichung kann in linearer Näherung auch bei gestörtem, schwach ausgelenktem Rand angewendet werden, gilt also allgemein, ohne von der Form des Randes abzuhängen. Zur Aufstellung dieser Beziehung wird eine physikalisch anschauliche Ableitung bevorzugt.

Die Trennfläche sei bei  $y = 0$ . Denkt man sich das Magnetfeld im Bereich  $y > 0$  erzeugt durch fiktive, linienförmige Ladungen  $\omega(x)$  (analog zu den Oberflächenladungen der Elektrostatik), die auf der Grenzfläche sitzen, so wird die  $y$ -Komponente des Feldes ausschließlich von der Ladung an dieser Stelle erzeugt, wobei zu beachten ist, daß aus Symmetriegründen je der halbe Fluß nach oben und unten geht. Es gilt also an der Oberseite der Trennfläche  $y = +0$ :

$$B_y(x) = \mu \omega(x)/2. \quad (2)$$

Zur  $x$ -Komponente des Feldes tragen dagegen alle Ladungen auf der Ebene bei, wobei die Feldstärke eines Ladungselementes  $\omega(x') dx'$ , das sich an der Stelle  $x'$  befindet, an der Stelle  $x$  gegeben ist durch  $\mu \omega(x') dx'/2\pi(x-x')$ .

<sup>9</sup> P. H. FRANK u. R. v. MISES, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Verlag Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1961, 1. Teil.

Insgesamt gilt also bei Integration über alle Quellpunktskoordinaten  $x'$ :

$$B_x(x) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x')}{x-x'} dx'. \quad (3)$$

Das dabei auftretende uneigentliche Integral ist als Hauptwert zu verstehen. Sämtliche im weiteren Verlauf angeschriebenen Integrale sind in dieser Weise zu deuten.

Setzt man Gl. (2) in Gl. (3) ein, so erhält man den gewünschten Zusammenhang zwischen  $B_y$  und  $B_x$  an der Grenzfläche  $y = +0$ :

$$B_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_y(x')}{x-x'} dx'. \quad (4)$$

Diese Gleichung kann auch als Integralgleichung zur Bestimmung von  $B_y$  bei bekanntem  $B_x$  aufgefaßt werden. Die Auflösung kann man sich mit einer ähnlichen physikalischen Überlegung ableiten, wie sie soeben verwendet wurde. Denkt man sich nämlich das Feld durch eine Oberflächenstromdichte  $j_z^*$  auf der Trennfläche erzeugt, so läßt sich mit einer analogen Argumentation folgendes zeigen:

$$B_x(x) = -\mu j_z^*(x)/2, \quad (5)$$

$$B_y(x) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_z^*(x')}{x-x'} dx', \quad (6)$$

woraus folgt:

$$B_y(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_x(x')}{x-x'} dx'. \quad (7)$$

Dies ist als Auflösung von Gl. (4) aufzufassen und umgekehrt. Diese Beziehungen lassen sich auch mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes ableiten<sup>10</sup>.

Für später wird noch der Zusammenhang zwischen  $B_y$  und  $B_x$  benötigt, wenn im Halbraum  $y < 0$  die Potentialgleichung für  $\mathbf{B}$  gilt. Die entsprechende Ableitung liefert dann an der Stelle  $y = -0$  die folgenden Beziehungen:

$$B_x(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_y(x')}{x-x'} dx'; \quad (8)$$

$$B_y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_x(x')}{x-x'} dx'. \quad (9)$$

<sup>10</sup> N. I. MUSCHELISCHWILI, Singuläre Integralgleichungen, Akademieverlag, Berlin 1965.

Will man darüber hinaus die Feldstärke im Außenraum ermitteln, so muß man das Integral Gl. (3) für einen beliebigen Aufpunkt anschreiben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_y(x') (\mathbf{r} - x' \mathbf{e}_x)}{(\mathbf{r} - x' \mathbf{e}_x)^2} dx'; \quad (10)$$

wobei  $\mathbf{r}$  der Aufpunkts-Ortsvektor und  $\mathbf{e}_x$  der Einheitsvektor in  $x$ -Richtung ist.

### 3. Randbedingungen

An der Trennfläche sind gewisse Randbedingungen einzuhalten, die nun zusammengestellt werden sollen. Die Größen in der Strömung werden mit dem Index 1, die im Außenraum mit dem Index 2 indiziert. Aus der Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  folgt, daß die Normalkomponente des Magnetfeldes stetig sein muß, also:

$$B_{y1} = B_{y2}. \quad (11)$$

Die Tangentialkomponente des Magnetfeldes kann dagegen unstetig verlaufen, da in der Trennfläche eine Oberflächenstromdichte  $j_z^*$  fließen kann. Es gilt dann:

$$B_{x1} - B_{x2} = \mu j_z^*. \quad (12)$$

Als Folge dieser Stromdichte tritt eine magnetische Kraft auf die Trennfläche auf, die durch einen Drucksprung kompensiert werden muß:

$$p_1 - p_2 = -j_z^* B_{x0}. \quad (13)$$

Die drei Gln. (11 – 13) sind lokal am Rand des strömenden Bereichs zu erfüllen. Innerhalb der linearen Näherung genügt es wieder, wenn diese Beziehungen auf der ungestörten Grenzfläche, also auf den entsprechenden Ebenen  $y = \text{const}$  erfüllt sind.

## 4. Die Lösung im strömenden Bereich

### 4.1. Gleichungen

In diesem Abschnitt werden kurz die bekannten Ergebnisse, siehe z. B. <sup>7</sup>, über lineare, magnetogasdynamische Strömungen für parallele Felder zusammengestellt, soweit sie für das folgende benötigt werden. Die Gleichungen werden sogleich in linearisierter, auf das gezeigte  $x$ - $y$ -Koordinatensystem bezogener Form angegeben.

Für die variablen Größen wird angesetzt:

Geschwindigkeit:  $\mathbf{v} = (U + u, v, 0)$

Magnetfeld:  $\mathbf{B} = (B_{x0} + b_x, b_y, 0)$

Druck:  $p = p_0 + p^*$

Dichte:  $\varrho = \varrho_0 + \varrho^*$ .

Damit erhält man die folgenden linearisierten Gleichungen:

$$\varrho_0 (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + U \partial \varrho^* / \partial x = 0; \quad (14)$$

zwei Komponenten der Impulsbilanz:

$$\varrho_0 U \partial u / \partial x + c^2 \partial \varrho^* / \partial x = 0; \quad (15)$$

$$\varrho_0 U \partial v / \partial x + c^2 \partial \varrho^* / \partial y - \frac{1}{\mu} B_{x0} (\partial b_y / \partial x - \partial b_x / \partial y) = 0; \quad (16)$$

Bedingung für eingefrorenes Feld im Fall paralleler Felder (sehr hohe magnetische Reynolds-Zahl):

$$U b_y - v B_{x0} = 0; \quad (17)$$

Divergenzfreiheit des Magnetfeldes:

$$\partial b_x / \partial x + \partial b_y / \partial y = 0. \quad (18)$$

Die Gln. (14 – 18) stellen ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zur Bestimmung der fünf unbekannten Größen  $u$ ,  $v$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  und  $\varrho^*$  dar. Der Druck kann aus der Dichte mittels der Isentropiebeziehung

$$dp / d\varrho = c^2 \quad (19)$$

berechnet werden, wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit bedeutet.

Das Gleichungssystem kann in den folgenden Differentialgleichungsoperator vierter Ordnung umgeformt werden:

$$L = (1 - M^2) (1 - C) \partial^4 / \partial x^4 + [1 + C(M^2 - 1)] \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 = 0, \quad (20)$$

wobei zur Abkürzung die Mach-Zahl

$$M = U/c \quad (21)$$

und die Cowlingsche Zahl

$$C = B_{x0}^2 / \mu \varrho_0 U^2 \quad (22)$$

eingeführt wurden. Der Operator ist auf eine der fünf Unbekannten anzuwenden, also:

$$L(u \text{ oder } v, b_x, b_y, \varrho^*) = 0. \quad (23)$$

Spaltet man von  $L$  noch den Operator  $\partial^2 / \partial x^2$  ab, der Diskontinuitäten auf Strömungslinien beschreibt, so erhält man schließlich den folgenden Differentialoperator:

$$\partial^2 / \partial x^2 - \frac{1}{\beta^2} \partial^2 / \partial y^2 = 0 \quad (24)$$

$$\text{mit } \beta^2 = \frac{(M^2 - 1)(1 - C)}{1 + C(M^2 - 1)}. \quad (25)$$

Bei negativem Vorzeichen von  $\beta^2$  ist der Operator elliptisch, bei positivem Vorzeichen ist eine Wellenlösung der Form  $f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y)$  möglich, der Operator wird dann als hyperbolisch bezeichnet. Die entsprechenden Wertebereiche, die auf Grund dieser Bedingung zu unterscheiden sind, kann man anschaulich in dem von Taniuti und Resler verwendeten  $M - 1/\sqrt{C}$ -Diagramm, das in Abb. 2 gezeigt ist, darstellen. Die beiden hyperbolischen Bereiche sind durch eingezeichnete Kurven mit gleichem  $\beta$  kenntlich gemacht.

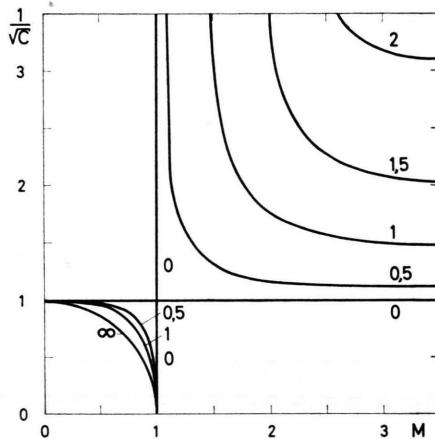


Abb. 2. Taniuti-Resler-Diagramm mit Kurven  $\beta = \text{const}$  in den hyperbolischen Bereichen.

Zu beachten ist noch, daß die Wellen in den hyperbolischen Bereichen eine physikalische Vorzugsrichtung aufweisen, die den stationären Gleichungen nicht mehr entnommen werden kann. Zur Ermittlung dieser Vorzugsrichtung müßte man z. B. den instationären Vorgang bei einer kleinen Änderung der Strömungsgeschwindigkeit betrachten. Störungen würden dabei von einer Störstelle längs der im stationären Fall auftretenden Wellenfronten nach einer Seite laufen. In dem hyperbolischen Bereich  $M > 1$  ist dies die stromabwärts gelegene Richtung, im Bereich  $M < 1$  dagegen erstrecken sich die Wellen ins stromaufwärts von der Störstelle gelegene Gebiet.

#### 4.2. Die vollständige Lösung in den hyperbolischen Bereichen

Jede Unbekannte kann nach Gl. (23) in den hyperbolischen Bereichen in der Form  $f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y)$  dargestellt werden. Ist jedoch eine abhängige Variable bekannt, so folgen aus den Gln. (14–18) die anderen Unbekannten<sup>7</sup>. Diese Zu-

sammenhänge werden nun angegeben. Gegeben sei z. B.:

$$v = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y). \quad (26)$$

Aus Gl. (17) folgt damit:

$$b_y = \frac{B_{x0}}{U} v = \frac{B_{x0}}{U} (f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y)). \quad (27)$$

Aus Gl. (15) wird:

$$\partial u / \partial x = - \frac{c^2}{\varrho_0 U} \partial \varrho^* / \partial x. \quad (28)$$

Setzt man dies in Gl. (14) ein, so erhält man:

$$\partial \varrho^* / \partial x = - \frac{\varrho_0}{U} \left( 1 + \frac{1}{M^2 - 1} \right) \partial v / \partial y. \quad (29)$$

Über  $x$  integriert ergibt das:

$$\varrho^* = - \frac{\varrho_0 M^2}{U(M^2 - 1)} \int \partial v / \partial y \, dx. \quad (30)$$

Eine nur noch von  $y$  abhängige Integrationskonstante ist dabei aus physikalischen Gründen wegzulassen.

Mit Gl. (26) ergibt sich schließlich:

$$\varrho^* = \beta \frac{\varrho_0 M^2}{U(M^2 - 1)} (f_1(x - \beta y) - f_2(x + \beta y)). \quad (31)$$

Mit Gl. (19) ist somit:

$$p^* = c^2 \beta \frac{\varrho_0 M^2}{U(M^2 - 1)} (f_1(x - \beta y) - f_2(x + \beta y)). \quad (32)$$

Aus Gl. (28) ergibt sich weiter:

$$u = \frac{-\beta}{M^2 - 1} (f_1(x - \beta y) - f_2(x + \beta y)); \quad (33)$$

und schließlich folgt aus Gl. (18) :

$$b_x = - \frac{B_{x0}}{U} (f_1(x - \beta y) - f_2(x + \beta y)). \quad (34)$$

Damit sind alle Unbekannten auf die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit zurückgeführt.

Am Beispiel der Umströmung eines schlanken Körpers im unendlich ausgedehnten Bereich soll nun auf eine konkrete Lösung hingewiesen werden, um fürs weitere den Wellen einen physikalischen Sinn zu geben (siehe z. B. <sup>7</sup>). Die Randbedingung für die Strömung an einem festen Körper ist, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf der Körperoberfläche verschwinden muß, was bei einem schlanken Körper in linearer Näherung bedeutet:

$$v/U = F'(x), \quad (35)$$

wobei  $F(x)$  die Gleichung der Körperkontur darstellt. Ist der Körper die einzige Störungsquelle in der Strömung, so können Wellen nur vom Körper

ausgehen, d. h. die oben definierte Vorzugsrichtung der Wellen muß vom Körper weg gerichtet sein.

Daraus folgt, daß in dem verwendeten Koordinatensystem (Abb. 1) oberhalb des Körpers bei  $M > 1$  die Wellen durch die Funktion  $f_1(x - \beta y)$  und bei  $M < 1$  durch  $f_2(x + \beta y)$  beschrieben werden, während unterhalb des Körpers entsprechend jeweils der andere Wellentyp auftritt. Im Gebiet vor der von der Körperspitze weglauenden Kopfwelle und hinter der vom Ende weglauenden Heckwelle findet in der unendlich ausgedehnten Strömung keine Störung statt.

## 5. Reflexion von Wellen an einer Grenzfläche

Trifft eine als bekannt angenommene Welle (einfallende Welle  $f_e$ ) auf eine Grenze des strömenden Bereichs, so wird von dort aus eine Welle in die Strömung zurücklaufen. Diese wird in Analogie zur Gasdynamik als reflektierte Welle  $f_r$  bezeichnet, siehe Abb. 3. Der Einfluß des Magnetfeldes im Außenraum kann sich bei dieser Aufgabenstellung mit einer bekannten, vorgegebenen einfallenden Welle nur auf die reflektierte Welle auswirken. Die Bestimmung dieser reflektierten Welle in Abhängigkeit von der einfallenden Welle ist die Aufgabenstellung in diesem Abschnitt.

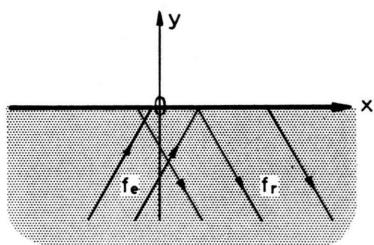


Abb. 3. Geometrie und Bezeichnungen beim Problem der Wellenreflexion.

### 5.1. Aufstellung und Lösung der Integralgleichung für die reflektierte Welle $f_r$

Zu erfüllen sind nun die unter 4. abgeleiteten Gleichungen im strömenden Bereich, die unter 2. aufgestellten Integralbeziehungen für den Außenraum sowie die in Abschnitt 3. erwähnten Randbedingungen.

Die Trennfläche liege bei  $y = 0$ . Dann gilt in der Strömung an der Trennfläche mit Gl. (26):

$$v = f_1(x) + f_2(x). \quad (36)$$

Entsprechend lassen sich alle anderen Unbekannten im strömenden Bereich (Index 1) daraus mit Hilfe der Gln. (27) und (31–34) durch Nullsetzen von  $y$  ermitteln:

$$b_{y1} = \frac{B_{x0}}{U} (f_1(x) + f_2(x)), \quad (37)$$

$$b_{x1} = \beta \frac{B_{x0}}{U} (f_1(x) - f_2(x)), \quad (38)$$

$$p^* = c^2 \beta \frac{M^2}{U(M^2-1)} (f_1(x) - f_2(x)). \quad (39)$$

Die Grenzbedingungen Gln. (11–13) gestatten nun, daraus die Werte für  $b_y$  und  $b_x$  außerhalb der Strömung zu ermitteln (Index 2):

$$b_{y2} = \frac{B_{x0}}{U} (f_1(x) + f_2(x)), \quad (40)$$

$$b_{x2} = \frac{B_{x0}}{U} \frac{1}{A} (f_1(x) - f_2(x)), \quad (41)$$

wobei zur Abkürzung die Größe  $A$  eingeführt wurde:

$$A = \frac{(M^2-1) C}{V(M^2-1)(1-C)(1+(M^2-1) C)}. \quad (42)$$

Diese Größe  $A$  ist der für die Bestimmung von  $f_r$  charakteristische Parameter, wie man erkennt, wenn man nun die Integralgleichung (4) zwischen  $b_{y2}$  und  $b_{x2}$  ansetzt:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x') + f_2(x')}{x - x'} dx'. \quad (43)$$

Dies ist eine inhomogene Integralgleichung zweiter Art zur Bestimmung der Funktion  $f_2(x)$  bei vorgegebenem  $f_1(x)$  bzw. umgekehrt. Die Auflösung nach einer dieser beiden Funktionen gelingt, wenn man nun noch die Gln. (40) und (41) in die Integralgleichung (7) einsetzt:

$$f_1(x) + f_2(x) = - \frac{1}{A \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x') - f_2(x')}{x - x'} dx'. \quad (44)$$

Untersucht man zunächst den Bereich  $M > 1$ , so ist  $f_1(x)$  die einfallende Welle, die Gln. (43) und (44) sind dann nach  $f_2(x)$  aufzulösen. Dazu multipliziert man Gl. (43) mit  $1/A$ , Gl. (44) mit  $-A$  und addiert. So erhält man schließlich nach einiger Umformung:

$$f_2(x) = \frac{1-A^2}{1+A^2} f_1(x) - \frac{2A}{1+A^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x')}{x-x'} dx'. \quad (45)$$

Im Bereich  $M < 1$  ist  $f_2(x)$  die einfallende Welle. Die Gln. (43) und (44) sind nun nach  $f_1(x)$  aufzulösen. Das Ergebnis läßt sich mit dem soeben erhaltenen zusammenfassen, wenn man das in diesem Bereich negative  $A$  durch  $|A|$  in folgender Weise ersetzt:

$$f_r(x) = \frac{1-A^2}{1+A^2} f_e(x) - \frac{2|A|}{1+A^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(x')}{x-x'} dx', \quad (46)$$

wobei  $f_e$  für beide Bereiche die einfallende Welle und  $f_r$  entsprechend die reflektierte Welle ist.

### 5.2. Diskussion des Ergebnisses

Der für Größe und Form der reflektierten Welle maßgebliche Parameter  $|A|$  variiert zwischen Null und Unendlich. In Abb. 4 sind Kurven  $A = \text{const}$  im Taniuti-Resler-Diagramm eingetragen. Im Bereich  $M < 1$  ist  $A$  negativ, im Gebiet  $M > 1$  positiv.

Einfach zu diskutieren ist der Grenzfall  $A = 0$ , bei dem nach Gl. (46) die reflektierte Welle gleich der einfallenden ist:  $f_r = f_e$ ; d. h. die einfallende Welle wird unverformt reflektiert, was wegen der Umkehr der Wellenrichtung bedeutet, daß eine Verdichtungswelle als Verdünnungswelle zurückkehrt und umgekehrt. Dieses Reflexionsverhalten ist aus der Gasdynamik an einem freien Strahlrand geläufig. Tatsächlich wird auch mit dem Magnetfeld die Größe  $A$  zu Null, was dem Übergang zur Gasdynamik entspricht. Jedoch auch für ein endliches Magnetfeld kann nach Abb. 4 der Parameter  $A$  sehr

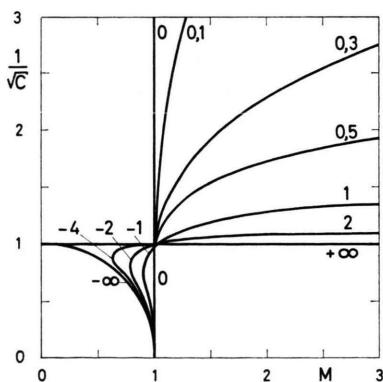


Abb. 4. Kurven  $A = \text{const}$  im Taniuti-Resler-Diagramm.

klein werden, wenn nämlich  $M$  gegen Eins geht. Dies liegt an dem schon aus der Gasdynamik bekannten „steifen“ Verhalten der linearisierten Strömung in der Umgebung von  $M = 1$ , das z. B. zu einem unendlich großen Widerstand eines Körpers

in der Strömung führt<sup>11</sup>. Hier ist an die begrenzte Gültigkeit der linearen Theorie in der Nähe des Übergangs vom elliptischen zum hyperbolischen Verhalten zu erinnern. Strömungen, in denen dieser Übergang stattfindet, sind wesentlich nichtlinear. In diesem Sinne dürfen die hier abgeleiteten Ergebnisse nicht unmittelbar auf Strömungen in der Nähe der in Abb. 4 gezeigten Grenzkurven angewandt werden.

Ein zweiter Grenzfall läßt sich ebenfalls einfach diskutieren. Bei  $A$  gegen plus oder minus Unendlich folgt aus Gl. (46):  $f_r = -f_e$ . Auch in diesem Fall bleibt die Form der Welle bei der Reflexion erhalten, nur wird jetzt eine Verdichtungswelle wieder als solche und eine Verdünnungswelle ebenfalls unverändert reflektiert. Dieses Verhalten tritt in der Gasdynamik an einer festen Wand auf. Wegen  $v = f_r + f_e$  ist die Geschwindigkeit  $v$  am Rand Null, d. h. der Strahlrand wird nicht ausgelenkt.

Nach der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens bei der Reflexion soll nun der allgemeine Fall diskutiert werden. Nach Gl. (46) setzt sich bei beliebigem  $A$  die reflektierte Welle aus zwei Anteilen zusammen, dem unverformt reflektierten Anteil, der durch den ersten Term gegeben ist, und dem Integralbeitrag, der bei  $A = \pm 1$  die reflektierte Welle wiedergibt. Diskutiert man zunächst diesen Fall, so kann das allgemeine Ergebnis bei beliebigem  $A$  leicht durch Linearkombination dieser Lösung und der unverformten Welle gefunden werden.

Bemerkenswert an dem Integralbeitrag zur reflektierten Welle ist, daß er auch noch von Null verschiedene Werte an Stellen liefert, wo die einfallende Welle  $f_e$  Null ist. Dies ist eine Folge des induzierten Magnetfeldes, das im Außenraum der Potentialgleichung genügt und deshalb überall von Null verschieden ist. Das Integral repräsentiert somit diesen über die Störstelle hinausgreifenden Effekt des induzierten Magnetfeldes.

Um die Eigenschaften der reflektierten Welle weiter zu untersuchen, wird noch ein konkretes Beispiel angegeben. Es sei die in Abb. 5 dargestellte Dreieckswelle gegeben zu:

$$\begin{aligned} f_e &= 0 && \text{für } x < -a, \\ f_e &= \alpha(x+a)/(a-b) && \text{für } -a < x < -b, \\ f_e &= -\alpha x/b && \text{für } -b < x < b, \\ f_e &= \alpha(x-a)/(a-b) && \text{für } b < x < a, \\ f_e &= 0 && \text{für } x > a. \end{aligned} \quad (47)$$

<sup>11</sup> E. TRUCKENBRODT, Aerodynamik des Flugzeugs, Verlag Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

Durch Variation von  $a$ ,  $b$  und  $\alpha$  kann der Einfluß der Kurvenform auf das Ergebnis untersucht werden. Eine solche Welle würde ein Körper mit parabelförmiger Kontur, wie er in Abb. 5 mit eingezeichnet ist, in einer unendlich ausgedehnten Strömung erzeugen. Bei  $a = b$  stellt Gl. (47) die Welle eines Körpers mit Parabelzweieckkontur dar.

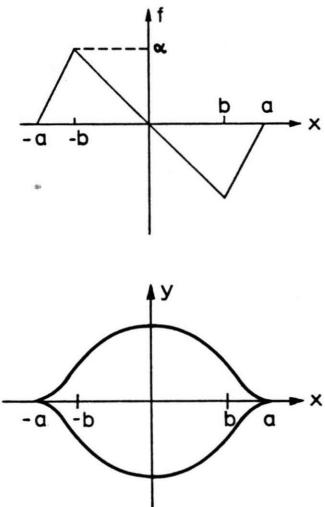


Abb. 5. Beispiel einer Körperkontur mit dazugehöriger Welle in der unendlich ausgedehnten Strömung.

Setzt man Gl. (47) in Gl. (46) ein, so erhält man für die reflektierte Welle bei  $A = \pm 1$ :

$$f_r(x) = -\frac{a}{\pi} \left[ \frac{a+x}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + \frac{x-a}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| - \frac{x}{b} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| \right]. \quad (48)$$

Dieses Ergebnis ist in Abb. 6 zusammen mit der einfallenden Welle für  $b = 0,8 a$  aufgetragen. Die reflektierte Welle hat eine völlig andere Gestalt als die einfallende, die Amplitude liegt jedoch in der Größenordnung der ursprünglichen Welle. Wie schon oben erwähnt, greift die reflektierte Welle über den Bereich hinaus, in dem die einfallende

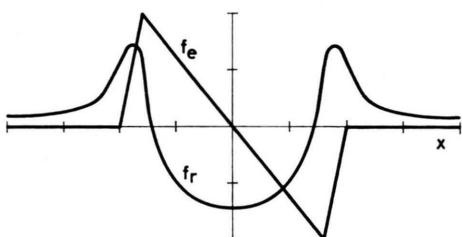


Abb. 6. Einfallende und reflektierte Welle bei  $A=1$  und  $b=0,8 a$ .

Welle vorgegeben wurde. Offensichtlich ist die reflektierte Welle besonders stark an Stellen, wo die einfallende Welle einen großen Differentialquotienten aufweist.

Um dies näher zu untersuchen, wurde in Abb. 7 die reflektierte Welle für  $b = 0,9 a$  eingetragen und schließlich in Abb. 8 die Kurve für  $b = a$ . Es bestä-

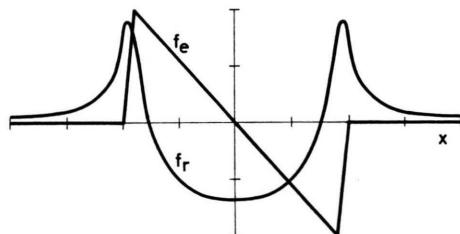


Abb. 7. Einfallende und reflektierte Welle bei  $A=1$  und  $b=0,9 a$ .

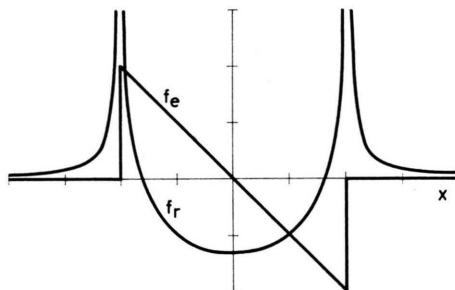


Abb. 8. Einfallende und reflektierte Welle bei  $A=1$  und  $b=a$ .

tigt sich, daß eine schnelle Amplitudenänderung der einfallenden Welle eine hohe Amplitude der reflektierten Welle hervorruft. Im Grenzfall  $b = a$ , der Welle des Parabelzweiecks, wird  $f_e$  unstetig, die reflektierte Welle hat dann an den Sprungstellen der einfallenden Welle unendlich hohe Amplitude.

An dieser Stelle muß daran erinnert werden, daß solche unstetigen Wellen wegen der endlichen elektrischen Leitfähigkeit nicht auftreten können, sondern daß sie immer eine gewisse Struktur besitzen, wobei als maßgeblicher Parameter die magnetische Reynolds-Zahl auftritt.

Festzuhalten ist jedoch, daß Wellen mit schneller Amplitudenänderung, wie sie z. B. von Körpern mit endlichen Winkeln an Bug und Heck erzeugt werden, bei der Reflexion zu wesentlich stärkeren Wellen führen können, und daß dieser Effekt mit zunehmender magnetischer Reynolds-Zahl anwächst.

Dies soll als ein einfaches Beispiel genügen, den Einfluß der Form der einfallenden Welle auf die re-

flektierte Welle zu diskutieren. In Abschnitt 6.2 wird ein weiteres Beispiel behandelt, bei dem eine im ganzen Bereich von Null verschiedene und differenzierbare, einfallende Welle untersucht wird.

Um nun den Einfluß der Größe  $A$  auf die Form der reflektierten Welle etwas genauer darzustellen, als es bisher durch die Diskussion der Fälle  $A = 0$ ,  $A \rightarrow \infty$  und  $A = \pm 1$  erfolgte, sind in Abb. 9 für einige Zwischenwerte von  $A$  die reflektierten Wellen angegeben, wobei die einfallende Welle mit  $b = 0,8 a$

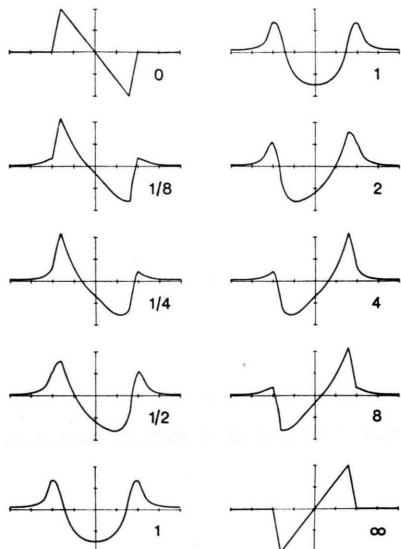


Abb. 9. Einfallende und reflektierte Welle bei  $b=0,8 a$  für verschiedene Werte von  $A$ .

zugrunde gelegt wurde. Der Übergang vom gasdynamischen Reflexionsverhalten an einem freien Rand zu dem einer festen Wand kommt dabei an Hand der Zwischenstufen klar zum Ausdruck. In diesem Bild entsprechen die Zwischenstufen einer gasdynamischen Reflexion an einer elastischen Wand, z. B. einer Gummimembran.

### 5.3. Anwendung auf die Umströmung eines Körpers in einer begrenzten Strömung

Im letzten Abschnitt wurde bei der Untersuchung der Reflexion eine Welle zugrunde gelegt, wie sie ein Körper in einer unendlich ausgedehnten Strömung aussenden würde. Näherungsweise kann diese Problemstellung übertragen werden auf einen Körper in einer begrenzten Strömung, wenn nämlich auf Grund der geometrischen Verhältnisse die reflektierte Welle am Ort des Körpers eine so kleine Am-

plitude hat, daß die Randbedingungen am Körper dadurch praktisch nicht modifiziert werden (siehe Abb. 10).

Diese Forderung bedeutet mit den Bezeichnungen von Abb. 10, daß  $\beta > l/d$  sein muß, wobei  $1/\beta$  der Tangens des Neigungswinkels der Wellen ist,  $l$  die Körperlänge und  $d$  der Abstand des Körpers von der Grenzfläche.

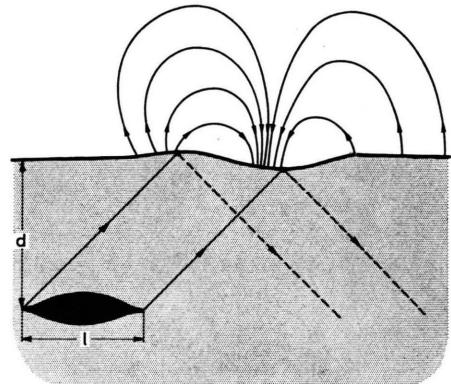


Abb. 10. Umströmung eines Körpers im Halbraum. Verformung des Strahlrandes, Skizze der Feldlinien des induzierten Magnetfeldes im Außenraum.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, trifft also die reflektierte Welle mit noch erheblicher Amplitude am Körper auf, dann wird die primär vom Körper erzeugte Welle dadurch modifiziert. Zur mathematischen Lösung dieses Problems bietet sich ein Iterationsverfahren an, das von der Welle des Körpers im unendlich ausgedehnten Medium ausgeht, dann die am Rand reflektierte Welle ermittelt, die vom Körper ausgehende Welle korrigiert, usw.

Die relative Einfachheit der hyperbolischen Lösung geht in diesem Fall prinzipiell verloren. Durch den angrenzenden Außenraum, wo die Lösung elliptisch ist, wirkt sich die Störung im gesamten Strömungsbereich aus. Die Unterteilung der Strömung in Einfluß- und Bestimmtheitsbereiche ist nicht mehr möglich, was auch zu einem Versagen der Charakteristikenmethode bei nichtlinearen Strömungen führt.

Wir wollen uns hier auf einige qualitative Aussagen beschränken, die in praktischen Fällen von Bedeutung sein könnten. Bei nach hinten laufenden Wellen ( $A > 0$ ) kann die Verdichtungswelle, die vom Bug ausgeht, nach der Reflexion im Heckgebiet auftreffen. Befindet man sich im Bereich freier Reflexion, dann wird die Verdichtungswelle als Verdünnungswelle reflektiert. Dies führt zu einer Verstärkung der vom Heck weglaufenden Verdichtungs-

welle. Im Fall, daß die einfallende Verdichtungswelle als solche reflektiert wird, kann dagegen die Heckwelle stark geschwächt werden.

Im Bereich der nach vorne laufenden Wellen ist entsprechend die vom Heck stromaufwärts gerichtete und dann reflektierte Welle zu berücksichtigen, falls diese auf die Bugpartie auftrifft. Dies kann entsprechend zu einer Verstärkung oder Abschwächung der vom Bug stromaufwärts gerichteten Welle führen. Bei einem evtl. experimentellen Nachweis dieser Wellen wäre dies mit zu berücksichtigen.

Im Hinblick auf Experimente ist eine Kenntnis des induzierten Magnetfeldes außerhalb des strömenden Bereichs von Interesse, da dies leicht einer Messung zugänglich ist. Dessen Werte an der Grenzfläche ergeben sich aus den Gln. (40) und (41). Daraus kann das Feld im Außenraum mittels Gl. (10) bestimmt werden.

In Abb. 10 ist für einen typischen Fall eine Skizze des Feldlinienbildes des induzierten Magnetfeldes im Außenraum angegeben, wobei dafür folgende Parameter zugrunde gelegt wurden:  $A = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $d/l = 1, 2$ . Der Verlauf des Strahlrandes ist ebenfalls skizziert. In linearer Näherung muß gelten:

$$v/U = y'(x), \quad (49)$$

wenn  $y(x)$  die Gleichung der Randstromlinie ist.

## 6. Wellen in einer begrenzten Strömung, die von einem äußeren Magnetfeld hervorgerufen werden

### 6.1. Strömung im Halbraum

Wie schon an Hand von Abb. 1 bei der Erläuterung der Problemstellung dargelegt wurde, können in einer begrenzten Plasmaströmung Wellen von der Begrenzung aus in die Strömung laufen, wenn dem konstanten Feld  $B_{x0}$  ein Störfeld überlagert ist, das z. B. von einem stromführenden Leiter im Außenraum erzeugt wird. Dieses Feld wird im folgenden mit  $b_y^a$  bzw.  $b_x^a$  bezeichnet. Die Linearisierungsbedingungen erfordern, daß dieses Feld an der Grenzfläche klein gegen das überlagerte konstante Feld  $B_{x0}$  ist.

Zunächst wird wieder eine Strömung im Halbraum  $y < 0$  untersucht. Mit der Kenntnis der Vorzugsrichtung der magnetogasdynamischen Wellen können die auf die Grenzfläche zulaufenden Wellen ausgeschieden werden. Es sind wieder die beiden

Fälle  $M > 1$  und  $M < 1$  zu unterscheiden. Im ersten Fall ist  $f_2(x + \beta y)$  die vom Rand wegfahrende Welle, im zweiten Fall  $f_1(x - \beta y)$ . Formelmäßig lassen sich beide Fälle wie oben zusammenfassen durch Einführung von  $|A|$ . Es gilt dann mit Hilfe von Gl. (40) und (41) an der Trennfläche im Außenraum für die Summe von äußerem und induziertem Feld:

$$b_y^i + b_y^a = \frac{B_{x0}}{U} f(x); \quad (50)$$

$$\text{und } b_x^i + b_x^a = -\frac{B_{x0}}{U} \frac{1}{|A|} f(x). \quad (51)$$

Wendet man nun wieder die Gln. (4) und (7) für das induzierte Feld an, so erhält man zwei Beziehungen für  $f(x)$ . Durch geeignete Linearkombination ähnlich wie unter 5.1 gelingt es,  $f(x)$  explizit zu ermitteln:

$$f(x) = \frac{U}{B_{x0}} \frac{1}{|A| + 1/|A|} \left( -b_x^a + |A| b_y^a + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_y^a(x')}{x - x'} dx' + \frac{|A|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_x^a(x')}{x - x'} dx' \right). \quad (52)$$

Bedenkt man nun, daß  $b_x^a$  und  $b_y^a$  von Strömen in der oberen Halbebene erzeugt werden, somit in der unteren Halbebene einer Potentialgleichung genügen, so sind für  $b_x^a$  und für  $b_y^a$  in der Halbebene  $y < 0$  die Formeln (8) und (9) anwendbar. Damit folgt aus Gl. (52) schließlich:

$$f(x) = \frac{2U}{B_{x0}} \frac{1}{|A| + 1/|A|} (|A| b_y^a - b_x^a). \quad (53)$$

Wie im vorigen Beispiel sind die beiden Grenzfälle  $A = 0$  und  $A \rightarrow \infty$  leicht zu diskutieren.  $A = 0$  ergibt  $f(x) = 0$ ; dies folgt auch aus der Tatsache, daß  $A = 0$  den Grenzfall der Gasdynamik bedeutet, wo die Strömung nicht durch das Magnetfeld beeinflußbar ist. Bei  $A \rightarrow \infty$  ist  $f(x) = 2U b_y^a / B_{x0}$ . Die Wellenform wird somit ausschließlich durch die  $y$ -Komponente des äußeren Störfeldes bestimmt.

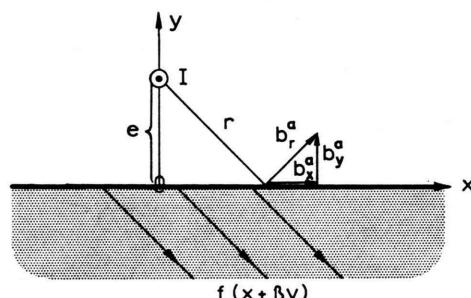


Abb. 11. Stromführender Draht außerhalb einer Strömung im Halbraum  $y < 0$ .

Zum Zwecke einer genaueren Diskussion wird das Magnetfeld eines stromführenden Drahtes als äußeres Störfeld  $\mathbf{b}^a$  genommen (siehe Abb. 11). Mit den in Abb. 11 eingetragenen Richtungen gilt:

$$b_r^a = \mu I / 2 r \pi, \quad (54)$$

daraus folgt:

$$b_x^a = b_r^a e/r = \frac{\mu I}{2 \pi e} \frac{1}{1 + (x/e)^2}, \quad (55)$$

$$b_y^a = b_r^a x/r = \frac{\mu I}{2 \pi e} \frac{x/e}{1 + (x/e)^2}; \quad (56)$$

somit folgt mit Gl. (53):

$$f(x) = \frac{2 U}{B_{x0}} \frac{\mu I}{2 \pi e} \frac{1}{|A| + 1/|A|} \frac{|A|(x/e) - 1}{1 + (x/e)^2}. \quad (57)$$

In Abb. 12 sind einige Kurven  $f(x)$  eingetragen, und zwar für  $A = 0, 2, \infty$ , für  $A \rightarrow \infty$  und für  $A = \sqrt{3}$ , wo  $f(x)$  ein absolutes Maximum aufweist.

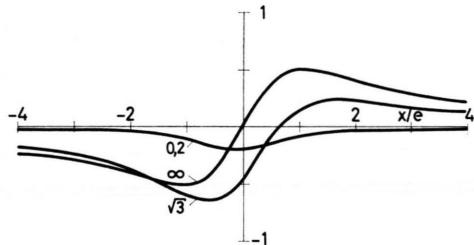


Abb. 12. Normierter Amplitudenverlauf  $\frac{f(x)}{(2 \mu I / B_{x0} 2 \pi e)}$  der Wellen, die von einem stromführenden Draht hervorgerufen werden für verschiedene Werte des Parameters  $A$ .

## 6.2. Plasmastrahl zwischen zwei stromführenden Drähten

Aus Symmetriegründen ist die im vorigen Abschnitt gefundene Lösung unter gewissen Bedingungen auch anwendbar auf einen ebenen Strahl zwischen zwei Drähten, die in entgegengesetzter Richtung stromdurchflossen sind (siehe Abb. 13).

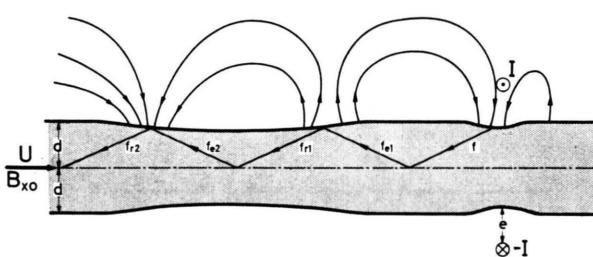


Abb. 13. Plasmastrahl zwischen stromführenden Drähten. Verlauf des Strahlrandes und Feldlinienbild des induzierten Feldes im Außenraum. Bereich der stromaufwärts gerichteten Wellen.

Zur Erfüllung der Symmetrievereinigung in der Achse muß von dort eine reflektierte Welle weglaufen, so daß auf der Achse  $v = 0$ , also mit den Bezeichnungen von Abb. 13:

$$f_{e1} = -f; \quad f_{e2} = -f_{r1}; \quad \text{usw.}$$

Die so in der Achse reflektierte Welle trifft um die Strecke  $x_0$  verschoben wieder auf dem Rand auf. Ist nun

$$x_0 \gg e, \quad (55)$$

so bleibt dadurch die Randwertbedingung in der Umgebung des Drahtes praktisch unbeeinflußt und die von der Umgebung des Drahtes vom Rand weglaufende Welle ist dieselbe wie die im vorigen Abschnitt für den Halbraum abgeleitete.

$x_0$  berechnet sich aus  $\beta$  und  $d$  zu  $x_0 = 2 \beta d$ , so daß die Ungleichung (55) auch in eine Bedingung für  $\beta$  umgeschrieben werden kann:

$$\beta \gg e/d. \quad (56)$$

Ist diese Beziehung nicht erfüllt, tritt also die in der Mitte reflektierte Welle in Wechselwirkung mit der primär erzeugten, dann wäre wieder ein Iterationsverfahren, wie in 5.3 vorgeschlagen, anzuwenden.

Mit den Bezeichnungen von Abb. 13 ist nach Gl. (53) :

$$f(x) = K \frac{|A|(x/e) - 1}{1 + (x/e)^2} \frac{|A|}{1 + A^2}; \quad (57)$$

$$\text{mit } K = U \mu I / B_{x0} \pi e.$$

Nach der Reflexion in der Achse und Durchlaufen des Strahls bis zum Rand erhält man dort:

$$f_{e1} = K \frac{1 - |A|(x/e)}{1 + (x/e)^2} \frac{|A|}{1 + A^2}. \quad (58)$$

Dabei wurde eine neue, um  $x_0$  verschobene  $x$ -Koordinate eingeführt. Mit Hilfe von Gl. (46) kann nun  $f_{r1}$  ermittelt werden:

$$f_{r1} = K \frac{|A|}{1 + A^2} \frac{1 - A^2}{1 + A^2} \frac{1 - A^2(x/e)}{1 + (x/e)^2} - \frac{2 A^2}{(1 + A^2)^2} \frac{1}{\pi} K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A|(x'/e) - 1}{((x/e) - x'/e)(1 + (x'/e)^2)} d(x'/e). \quad (59)$$

Das Integral in Gl. (59) kann mit den Methoden der Funktionentheorie leicht berechnet werden, wenn der Integrationsweg z. B. im Unendlichen über die positiv imaginäre Ebene geschlossen wird. Der Integrand besitzt dann zwei Pole innerhalb des Integrationsweges bei  $x' = x$  und bei  $x' = i e$ . Die Definition des Hauptwerts führt dazu, daß von dem

Pol auf dem Integrationsweg bei  $x' = x$  das halbe Residuum zum Integral beiträgt.

Man erhält dabei folgendes Ergebnis:

$$f_{r1} = K \frac{|A|}{1+A^2} \frac{1+|A|(x/e)}{1+(x/e)^2}. \quad (60)$$

Nach einmaliger Reflexion in der Achse folgt dann:

$$f_{e2} = -f_{r1} = -K \frac{|A|}{1+A^2} \frac{1+|A|(x/e)}{1+(x/e)^2}. \quad (61)$$

Bedenkt man, daß bei der Reflexion am Strahlrand der in  $x$  ungerade Anteil lediglich das Vorzeichen wechselte, während der in  $x$  gerade Anteil erhalten blieb, so kann unter Anwendung dieser Regel sofort  $f_{r2}$  angegeben werden:

$$f_{r2} = -K \frac{|A|}{1+A^2} \frac{1-|A|(x/e)}{1+(x/e)^2} = f(x). \quad (62)$$

Diese Funktion ist wieder gleich der ersten, vom Draht erzeugten Welle  $f(x)$ . Das heißt, die Strömung in dem Strahl ist periodisch mit einer Periode  $2x_0$ . Dies steht in Analogie zu den periodischen Überschall-Freistrahlen der Gasdynamik.

In Abb. 13 ist diese Lösung schematisch aufgezeichnet, und zwar im Bereich der stromaufwärts gerichteten Wellen. Der Verlauf des Strahlrandes, der sich wieder aus Gl. (49) ergibt, sowie die Feldlinien des induzierten Feldes im Außenraum sind skizziert. Im Strahlinneren sind die Wellen ange deutet.

## 7. Lösung in den elliptischen Bereichen

In den beiden elliptischen Bereichen des Taniuti-Resler-Diagramms Abb. 2 hat man den Differentialoperator (24) mit negativem  $\beta^2$  auf irgendeine der abhängigen Variablen anzuwenden.

Wir können uns bei der Diskussion dieser Gleichung auf den Laplace-Operator, der bei  $\beta^2 = -1$  aus Gl. (24) hervorgeht, beschränken, da der allgemeine Fall daraus mittels einer Affintransformation ähnlich der Prandtl-Glauert-Transformation der Gasdynamik leicht gewonnen werden kann<sup>12</sup>. Wendet man den Laplace-Operator auf  $b_x$  und  $b_y$  an, also  $\Delta b_x = 0$  und  $\Delta b_y = 0$ , so folgt daraus, daß auch im strömenden Bereich keine elektrischen Ströme fließen. Ausgenommen davon sind die in Kap. 4 erwähnten Scherschichten, die durch den abgespaltenen Operator  $\partial/\partial x$  beschrieben werden und in denen eine Flächenstromdichte fließen kann.

<sup>12</sup> J. E. McCUNE u. E. L. RESLER, J. Aerospace Sci. 27, 493 [1960].

Das Magnetfeld gehorcht also in diesem Fall automatisch den Gln. (4) und (7), womit die Randbedingungen fürs Magnetfeld schon erfüllt sind. So mit bleibt lediglich die Randbedingung für den Druck Gl. (13).

Als ein Beispiel für eine Lösung in den rein elliptischen Bereichen wird das schon im vorigen Abschnitt behandelte Problem einer durch eine Ebene begrenzten Strömung untersucht, wo die Störung von einem äußeren Magnetfeld herröhrt.

Ein induzierter Strom tritt in diesem Fall nur als Flächenstromdichte  $j_z^*$  längs der Grenzfläche auf. Die Tangentialkomponente der induzierten Feldstärke springt somit an der Grenze:

$$b_{x1}^i - b_{x2}^i = \mu j_z^*. \quad (63)$$

Aus Symmetriegründen folgt daraus, wenn nur eine solche Trennfläche vorhanden ist:

$$b_{x1}^i = \mu j_z^*/2; \quad (64)$$

$$\text{und} \quad b_{x2}^i = -\mu j_z^*/2. \quad (65)$$

Im leitfähigen Bereich läßt sich nun ein Zusammenhang zwischen dem totalen Magnetfeld  $b_x^t = b_x^i + b_x^a$  und  $p^*$  und somit auch wegen Gl. (13) mit  $j_z^*$  finden, denn aus Gl. (38) folgt:

$$b_y^t = B_{x0} v/U. \quad (66)$$

Differenziert man dies nach  $y$  und ersetzt  $\partial v/\partial y$  mittels der Kontinuitätsgleichung im inkompresiblen Fall nach der Gleichung

$$\partial v/\partial y = -\partial u/\partial x, \quad (67)$$

und ferner  $\partial b_y^t/\partial y$  mittels der Beziehung  $\text{div } \mathbf{b}^t = 0$

$$\partial b_y^t/\partial y = -\partial b_x^t/\partial x, \quad (68)$$

so erhält man nach einmaliger Integration über  $x$

$$b_x^t = B_{x0} u/U. \quad (69)$$

Eine von  $x$  unabhängige Integrationskonstante kann dabei aus physikalischen Gründen ausgeschlossen werden. Gl. (15) liefert noch den Zusammenhang zwischen  $u$  und  $p^*$ :

$$u = -p^*/U \varrho_0. \quad (70)$$

Setzt man Gl. (70) in Gl. (69) ein, so folgt die Beziehung:

$$b_x^t = b_{x1}^i + b_x^a = -B_{x0} p^*/U^2 \varrho_0. \quad (71)$$

Ersetzt man jetzt  $b_{x1}^i$  nach Gl. (64) und  $p^*$  nach Gl. (13), so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Flächenstromdichte  $j_z^*$ :

$$j_z^* = \frac{2 b_x^a / \mu}{2 C - 1}. \quad (72)$$

Bei  $C = 0,5$  wechselt  $j_z^*$  das Vorzeichen, indem es einen Pol durchläuft. Die Linearisierungsbedingung schränkt die Gültigkeit der Lösung in der Umgebung dieses Pols zwar ein, ein starkes Ansteigen der Stromdichte an dieser Stelle ist jedoch zu erwarten. Der physikalische Grund für dieses Verhalten resultiert aus dem doppelten Einfluß der Stromdichte. Einerseits hält die durch sie verursachte magnetische Kraft den Druck das Gleichgewicht, andererseits legen die Gleichungen im leitfähigen Bereich einen Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld, das

z. Tl. von der induzierten Stromdichte erzeugt wird, und dem Druck fest. Beide Einflüsse führen bei  $C = 0,5$  zu einem instabilen Verhalten.

Die aufgeführten Beispiele demonstrieren die Bedeutung einer endlichen Begrenzung der Strömung in einer Reihe von verschiedenen Fällen. Auch für kompliziertere, z. B. dreidimensionale oder nicht-lineare Strömungen kann mit Hilfe dieser Ergebnisse ein zumindest qualitativer Überblick über die Wechselwirkung zwischen dem Feld im Außenraum und der Strömung gewonnen werden.

## Über die gasdynamischen Vorgänge während der Dunkelpause von Drahtexplosionen und ihre Bedeutung für die Wiederzündung

WILHELM TIEMANN

Institut für Plasmaphysik der Technischen Universität Hannover

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1952–1960 [1968]; eingegangen am 18. September 1968)

Gasdynamic flow phenomena during the dwell time of exploding wires and their importance in reignition problems are investigated. Schlieren photographs show a shock wave inside the metal vapor cylinder converging to the axis. According to the theory of detonation this shock wave determines the radial distribution of temperature, pressure, and density in the vapor cylinder. It is shown, that reignition occurs always at the radius of minimum vapor density. Denoting the moment of reignition as  $t_Z$  and the moment, when the converging shock wave reaches the axis, as  $t_R$ , the following types of discharge may be distinguished:

- 1) For  $t_Z < t_R$  reignition occurs immediately in front of the inward facing shock wave.
- 2) For  $t_Z > t_R$  reignition starts in the axis of the vapor cylinder.

Die Methode der elektrischen Drahtexplosion, bei der ein dünner Metalldraht durch Entladen einer Kondensatorbatterie explosionsartig verdampft wird, dient auf Grund der einfachen Versuchstechnik häufig zur Erzeugung dichter Metalldampfplasmen. Obwohl zahlreiche Veröffentlichungen<sup>1–3</sup> über elektrische Drahtexplosionen vorliegen, sind die Vorgänge, die zur Entstehung des Plasmas führen, in wesentlichen Punkten noch unklar; das gilt insbesondere für die im folgenden untersuchte Drahtexplosion mit „Dunkelpause“.

Bei einer Drahtexplosion mit Dunkelpause setzt sich der Entladungsablauf aus drei Abschnitten zusammen. Der Vorgang beginnt mit einem kurzen Entladungsimpuls, durch den der Draht explosionsartig aufgeheizt und verdampft wird. Unmittelbar darauf folgt eine Entladungspause, da der entstehende Dampfzylinder elektrisch nichtleitend ist und wegen der anfänglich hohen Dampfdichte eine Gas-

entladung nicht einsetzen kann. Diese Entladungspause tritt optisch als Dunkelpause in Erscheinung<sup>1</sup>.

Die zu Beginn der Entladungspause einsetzende Expansion des Dampfzyinders führt jedoch schnell zu einer starken Abnahme der Dampfdichte. Währenddessen liegt an der Entladungsstrecke eine hohe, zeitlich konstante Restspannung; unter ihrer Wirkung kann bei hinreichender Dichteabnahme schließlich ein elektrischer Durchschlag im Dampfzyinder erfolgen. Dieser Vorgang, der einen neuen Entladungsabschnitt einleitet, wird als „Wiederzündung“ bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit behandelt noch ungeklärte, den Mechanismus der Wiederzündung betreffende Fragen. Dazu wurden sowohl die gasdynamischen Vorgänge während der Dunkelpause als auch die Entladungsscheinungen bei der Wiederzündung näher untersucht. Es zeigt sich, daß ein enger Zusammenhang zwischen Ort und Zeitpunkt der Wie-

<sup>1</sup> B. EISELT, Dissertation, TH Hannover 1951; Z. Phys. **132**, 54 [1952].

<sup>2</sup> W. MÜLLER, Z. Phys. **149**, 397 [1957].

<sup>3</sup> W. G. CHACE u. H. K. MOORE, Exploding Wires, Vol. 1–3.